EXERCICE N°1 : 40' 6 points

Soit la fonction f définie sur]0 , 3] par $f(x) = 1 - \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$.

1) a) Etudier la dérivabilité de f en 3 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Montrer que f est dérivable sur]0 , 3[et que pour tout $x \in]0 , 3[$, $f'(x) = \dfrac{9}{x^2\sqrt{9 - x^2}}$.

c) Dresser le tableau de variation de f et montrer que f réalise une bijection de]0 , 3] sur un intervalle J que l'on déterminera.

2) Montrer que l'équation f(x) = - x admet dans]0 , 3] une solution unique α et que 1,2 < α < 1,3.

3) Déterminer l'intersection de ζ_f avec l'axe des abscisses. Tracer dans un même repère ON ζ_f et $\zeta_{f^{-1}}$.

4) Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$. f^{-1} est – elle dérivable en 1 ?

5) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x dans J.

6) On considère la fonction h définie sur [0 , π/2[par $h(x) = f(3\cos x)$.

a) Montrer que pour tout x de [0 , π/2[, h(x) = 1 - tan x.

b) Montrer que h est une bijection de [0 , π/2[sur]-∞ , 1].

c) Montrer que h^{-1} est dérivable sur]-∞ , 1] et déterminer $\left(h^{-1}\right)'$.

EXERCICE N°2 : 40' 6 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - \dfrac{1}{2}$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; Interpréter ses limites graphiquement.

2) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in]-1 , -½[$.

3) a) Déterminer l'équation de la tangente T à C_f au point I d'abscisse 0 .

b) Justifier que I est un point d'inflexion de Cf.

4) a) Montrer que f réalise une bijection et expliciter sa fonction réciproque f^{-1}.

b) Tracer T et les courbe C_f et $C_{f^{-1}}$ dans un même repère R.

5) Soit g la fonction définie sur $]-\infty , 0]$ par : $\begin{cases} g(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$.

a) Montrer que g est dérivable sur $]-\infty , 0[$ et calculer g'(x).

b) Soit x < 0. Montrer qu'il existe $c \in]x , 0[$ tel que $g(x) + 1 = c \times f'(c)$.

c) En déduire que g est dérivable à gauche en 0 et que $g'_g(0) = 0$. Dresser le Tv de g.

EXERCICE N°3 : 35' 5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = 1 - \sqrt{\dfrac{x}{x-2}} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = 1 + \dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement le dernier résultat.

b) Dresser le tableau de variation de f. Tracer ζ_f.

2) a) Vérifier que pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a $f'(x) \leq \dfrac{1}{4\sqrt{3}}$.

b) En déduire que l'équation f(x) = x admet dans $[1, +\infty[$ une solution unique α et que $\alpha \in]1,2[$

3) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur]0,2[.

b) Donner l'expression de $f^{-1}(x)$ dans chacun des intervalles]0,1] et]1,2[.

c) Tracer $\zeta_{f^{-1}}$ dans le même repère que ζ_f.

EXERCICE N°4 : 25' 5 points

Soit la fonction f définie sur]0 , 4[par : $f(x) = \dfrac{2x - 4}{\sqrt{4x - x^2}}$.

1) a) Montrer que f réalise une bijection de]0 , 4[sur IR. **b)** Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in$ IR.

2) Montrer que l'équation f(x) = x admet dans]0 , 4[une unique solution α. Vérifier que $\alpha \in]2 , 4[$.

3) a) Etudier la position de ζ_f par rapport à Δ : la tangente à ζ_f au point d'abscisse 2.

b) Tracer ζ_f, Δ et la courbe $\zeta_{f^{-1}}$.